



BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapă locală, Neamț
08.02.2025
Clasa a V-a

Problema 1.

Stabiliți dacă numărul $N = 10^{2025} - 2^{10}$ este pătrat perfect.

Soluție și barem:

Scriem $N = 10^{2025} - 2^{10} = 1 \underbrace{0000 \dots 0000}_{\text{de } 2025 \text{ ori}} - 1024 =$

$\underbrace{9999 \dots 9}_{\text{de } 2021 \text{ ori}} 8976 \dots \dots \dots 3 \text{ p}$

Calculăm suma cifrelor numărului N: $9 \cdot 2021 + 8 + 9 + 7 + 6 = 18219$

Se observă că $18219 \not\div 3$ (3-prim) dar 18219 NU este divizibil cu $3^2 = 9 \dots 2 \text{ p}$

Concluzia: N nu este pătrat perfect (cu justificare) $\dots \dots \dots 2 \text{ p}$

Problema 2.

Să se găsească pătratele perfecte de patru cifre de forma $\overline{a(a+b)(b+c)c}$.

Soluție și barem:

Putem scrie: $\overline{a(a+b)(b+c)c} = 1000 \cdot a + 100 \cdot (a+b) + 10 \cdot (b+c) + c = 1100 \cdot a + 110 \cdot b + 11 \cdot c =$

$= 11(100 \cdot a + 10 \cdot b + c) = 11 \cdot \overline{abc} \dots \dots \dots 2 \text{ p}$

Dacă $\overline{a(a+b)(b+c)c}$ este pătrat perfect atunci $11 \cdot \overline{abc} = 11 \cdot k^2$, $k \in \mathbb{N}$

Din $100 \leq \overline{abc} \leq 999 \Rightarrow 10 \leq k^2 \leq 90 \dots \dots \dots 2 \text{ p}$

Analizăm următoarele situații: $k^2 \in \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$

Pentru $k^2 = 16 \Rightarrow \overline{abc} = 176$ dar $b+c = \text{cifră} \Leftrightarrow 7+6=13$ fals!

Pentru $k^2 = 25 \Rightarrow \overline{abc} = 275$ dar $b+c = \text{cifră} \Leftrightarrow 7+5=12$ fals!

Pentru $k^2 = 36 \Rightarrow \overline{abc} = 396$ dar $b+c = \text{cifră} \Leftrightarrow 9+6=15$ fals!

Pentru $k^2 = 49 \Rightarrow \overline{abc} = 539$ dar $b+c = \text{cifră} \Leftrightarrow 3+9=12$ fals!



Pentru $k^2 = 64 \Rightarrow \overline{abc} = 704$ dar $b + c = \text{cifră} \Leftrightarrow 0 + 4 = 4$ adevărat!
Avem $\overline{a(a+b)(b+c)c} = 7744 = 88^2$

Pentru $k^2 = 81 \Rightarrow \overline{abc} = 891$ dar $b + c = \text{cifră} \Leftrightarrow 9 + 1 = 10$ fals!
..... 3 p

Problema 3.

Un fermier vinde păsări de curte astfel: o găină, două rațe, trei găște și patru curci cu prețul total de 1270 lei, respectiv o curcă, două găște, trei rațe și patru găini cu prețul total de 680 lei. Cu câți lei este mai scumpă o curcă decât o rață și două găini?

Gazeta Matematică nr. 9/2024

Soluție și barem:

5 găini, 5 rațe, 5 găște și 5 curci au prețul total de 1950 lei.....2 p
Deci, 1 găină, 1 rață, 1 găscă și 1 curcă au prețul de 390 lei.....2 p
2 găini, 2 rațe, 2 găște și 2 curci costă 780 lei, iar 4 găini, 3 rațe, 2 găște și 1 curcă costă 680 lei.....2 p
Deci, o curcă costă cu 100 de lei mai mult decât o rață și două găini.....1 p

Problema 4.

Se consideră numărul $n = 2025 + 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2025}$. Să se afle restul împărțirii numărului n la 100.

Soluție și barem:

A găsi restul împărțirii unui număr natural la 100 înseamnă să găsim ultimele două cifre ale numărului.

Ne ocupăm de numărul $A = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2023}$.

Numărul A are 2025 de termeni.

Observăm că $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = 2800$.

Cum $2025 : 4 = 506$ rest 1 vom grupa termenii lui A câte 4 lăsând de o parte primul termen.
..... 2 p

Avem:

$$\begin{aligned} A &= 7 + (7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5) + (7^6 + 7^7 + 7^8 + 7^9) + \dots + (7^{2022} + 7^{2023} + 7^{2024} + 7^{2025}) \\ &= 7 + 7 \cdot (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + 7^5 \cdot (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + \dots + 7^{2021} \cdot (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) = \\ &= 7 + 7 \cdot 2800 + 7^5 \cdot 2800 + \dots + 7^{2021} \cdot 2800 \dots \dots \dots 3 p \end{aligned}$$

Termenii care conțin pe 2800 vor avea ultimele 2 cifre egale cu zero. Deci ultimele 2 cifre ale numărului n sunt date de ultimele 2 cifre ale numărului $2025 + 7 = 2032$, adică 32.
Prin urmare restul împărțirii numărului n la 100 este 32..... 2 p